Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1

(Banque PT, Maths B 2022)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note ${}^tM$ sa transposée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace et $\det(M)$ son déterminant.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F.

Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$. E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$.

Enfin on note $I = M(1,0,0), J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$. 1. (a) Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension. (b) Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. 2. On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \varphi(M,N) = \mathrm{tr}\left({}^tMN\right)$$

(a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. (b) Vérifier que les matrices I et $J+K$ sont deux vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire φ. (c) Déterminer le projeté orthogonal de la matrice K sur le sous-espace vectoriel G engendré par les matrices I et $J+K$. En déduire la distance K à G. (d) En effectuant un minimum de calculs supplémentaires, donner une base orthonormée de E. (e) Déterminer le supplémentaire orthogonal de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

(EML 1998)

Notations :

E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

E_n désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I — Étude d'un produit scalaire

1. (a) Montrer que, pour tout polynôme P de E, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1}. En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $\langle .,. \rangle$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

2. (a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E_n.
   (b) Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $\left\langle X^i, X^j \right\rangle$.

   Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.
3. (a) On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X-1$ et $Q_2 = X^2-4X+2$. Montrer que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthogonale de E_2.
   (b) Montrer pour tout couple (u,v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} \left(t^2+ut+v\right)^2 e^{-t}dt = \langle Q_2, Q_2\rangle + (u+4)^2\langle Q_1, Q_1\rangle + (u+v+2)^2\langle Q_0, Q_0\rangle$$

   (c) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u,v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(t^2+ut+v\right)^2 e^{-t}dt.$$

   Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

Partie II — Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \qquad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E_n.
2. (a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que la famille $\left(\Phi\left(X^j\right) + kX^j\right)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est liée.

   En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ.
   (b) Montrer que Φ est diagonalisable.
   (c) Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.

   En déduire que, pour tout k appartenant à $[\![0,n]\!]$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi\left(P_k\right) = -kP_k$.
   (d) Déterminer, pour tout k appartenant à $[\![0,n]\!]$, le degré de P_k.
   (e) Vérifier que $P_0 = Q_0, \quad P_1 = Q_1, \quad P_2 = Q_2$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall (P,Q) \in (E_n)^2, \quad < \Phi(P), Q >= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $\left(t \mapsto tP'(t)e^{-t}\right)$ avec la fonction $\left(t \mapsto \Phi(P)(t)e^{-t}\right)$.
   (b) Montrer, pour $(P,Q) \in (E_n)^2$, on a $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$.
   (c) En déduire que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Exercice 3

(E3A PC 2021)

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
2.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x.$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2N+3}.$
   (c) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$
3. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$

(b) Calculer $\varphi(1)$.

4.

(a) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}$.

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 4

(EPITA PC 2017)

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule $f(1)$.

Partie I

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

1. (a) Donner un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.

   (b) En déduire pour quelles valeurs du réel α positif l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2. (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

   (b) Vérifier que la fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(t)|\mathrm{d}t$.

   (c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:

   $$\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}.$$

   En déduire pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 2$ que :

   $$\frac{2}{\pi^\alpha}\int_2^{n+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\left(1+\int_1^{n-1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right).$$

   (d) Déterminer les valeurs du réel α telles que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3. (a) Etudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

   (b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$:

   $$\int_\pi^x\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

(c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

(d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4. Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

Partie II

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

5. (a) Montrer que pour tout réel $\alpha \in]0,1[$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} - 1\mathrm{d}t + \int_1^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que $\alpha \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ admet une limite que l'on déterminera quand α tend vers 0.

6. (a) A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t.$$

(b) Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t$, puis de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

(c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Partie III

7. (a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

8. On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.

(a) Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0,\pi]$ et justifier qu'elle admet sur $[0,\pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

(c) Etablir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geqslant \alpha\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

(d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

Partie IV

9. (a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t}{\sin(t)} \mathrm{d}t.$$

(b) Préciser la valeur de I_0 et prouver que l'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

(c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

10. On considère une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
A tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

(b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(c) Après avoir montré soigneusement que la fonction continue ψ introduite à la question 9.*c*) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.

Problème 1 Développement asymptotique de la série harmonique

(HEC BL 2010)

Dans tout le problème on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie I

1. Établir, pour tout entier naturel k non-nul l'encadrement suivant $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$
2. (a) Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) En utilisant le résultat de la question 1., montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1., montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.
4. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont les dérivées première et seconde sont notées respectivement f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose, pour tout entier naturel k non-nul $J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\, \mathrm{d}t$

(a) Établir pour tout entier naturel k non-nul l'égalité suivante

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) Établir, pour tout entier naturel k non-nul la double inégalité suivante

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que la série de terme général $(J_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

(c) En déduire également, pour tout entier naturel n non-nul l'encadrement suivant

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

(d) Prouver l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que l'on ait, pour tout entier naturel n non-nul

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Partie II

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes

(i) La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

(ii) $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$

(a) Soit ε un réel strictement positif, justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(c) Établir l'équivalence suivante : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$

2. Soit $\alpha > 1$

(a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(c) Établir l'équivalence suivante : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Partie III

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = u_n - \frac{1}{2n}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

1. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?
   (b) Justifier, pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante
$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante
$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$
2. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geqslant 1}$ convergente de limite nulle vérifiant
$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}$$
   (b) Établir à l'aide d'un développement limite à l'ordre 3, l'équivalence suivante
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$
3. En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle, vérifiant, pour tout entier naturel n non-nul
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}$$

Exercice 2

(Oral CCINP MP)

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement ńl'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajetż.
On note B_n l'événement ńl'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajetż.
On note C_n l'événement ńl'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajetż.
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.